

Einfache stochastische Prozesse

Helmut Brunner

Die Theorie der stochastischen Prozesse gehört zu den jüngsten und anwendungsorientiertesten Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zahlreiche Modelle bedienen sich stochastischer Prozesse, z.B. das stochastische Lagerhaltungsmodell, das stochastische Modell der Bedienungssysteme (Warteschlangen), die Theorie der Todes- und Erneuerungsprozesse und viele andere. Viele interessante Anwendungen beruhen auf der Theorie der Markov-Ketten, die bereits im Rahmen des Schulunterrichts behandelt werden könnten.

Ein stochastischer Prozeß verfolgt die Entwicklung einer Zufallsvariablen X im Verlauf der Zeit t (oder eines anderen Parameters).

Bei einer Markov-Kette X_t ist X eine diskrete Zufallsvariable z.B. mit Werten aus $\{1, 2, 3, \dots, s\}$ (= Zustandsraum) während t Werte aus $\{0, 1, 2, \dots\}$ annimmt. Gegeben ist eine Anfangsverteilung $p_1(0) = \{p_1(0), p_2(0), \dots, p_s(0)\}$ welche die Wahrscheinlichkeiten angibt, daß X zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand i angetroffen wird. Ferner muß die Matrix der "Übergangswahrscheinlichkeiten" p_{ij} gegeben sein, wobei $p_{ij} = W(X_1 = j / X_0 = i) = W(X_{t+1} = j / X_t = i)$ unabhängig von t ist.

Wir stellen uns die Aufgabe, aus der gegebenen Anfangsverteilung mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten die Verteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt zu berechnen. Zunächst soll $p_i(1)$ aus $p_i(0)$ berechnet werden:

Wir konstruieren das "sichere Ereignis" S:

$$(X_0 = 1) \cup (X_0 = 2) \cup \dots \cup (X_0 = s) = S$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(X_1 = j) &= (X_1 = j) \cap S = (X_1 = j) \cap \left(\bigcup_i (X_0 = i) \right) = \\ &= \left((X_1 = j) \cap (X_0 = 1) \right) \cup \left((X_1 = j) \cap (X_0 = 2) \right) \cup \dots\end{aligned}$$

Daher erhält man nach dem Additionssatz:

$$W(X_1 = j) = \sum_i W((X_1 = j) \cap (X_0 = i))$$

wegen $W(X_1 = j) \cap (X_0 = i) = W(X_0 = i) \cdot W(X_1 = j / X_0 = i)$

(Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

erhält man schließlich:

$$W(X_1 = j) = \sum_i p_i(0) \cdot p_{ij} \dots (F1)$$

Beispiel: Sei $X \in \{1, 2, 3\}$

$$p_i(0) = \{1/4, 1/2, 1/4\}$$

$$\text{und } (p_{ij}) = P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \emptyset \\ 1/2 & \emptyset & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Anwendung der Formel F1 ergibt: $p_i(1) = \{7/8, 5/16, 5/16\}$.

Man faßt die $p_i(0)$ als Zeilenvektor auf und bildet die skalaren Produkte mit den Spaltenvektoren von P.

Will man die Verteilung $p_i(2)$, so wendet man wieder die Formel F1 an, ersetzt aber die $p_i(0)$ durch die soeben berechneten $p_i(1)$:

$$p_i(2) = \{11/32, 27/54, 15/64\}$$

Wie gelangt man nun direkt von $p_i(0)$ zu $p_i(n)$?

Bezeichnet man die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$W(X_n=j/X_0=i)$ mit $p_{ij}(n)$, so folgt aus Formel F1

$$W(X_n=j) = \sum_i p_i(0) \cdot p_{ij}(n)$$

Die Frage lautet also: wie erhält man $p_{ij}(n)$ aus p_{ij} ?

Wir berechnen zuerst $p_{ij}(2)$:

Für den Übergang $X_0=i$ in $X_1=k$ beträgt die Wahrscheinlichkeit p_{ik}
für den anschließenden Übergang von $X_1=k$ in $X_2=j$ beträgt die Wahr-
scheinlichkeit p_{kj} , daher nach dem Multiplikationssatz für

$$X_0=i \text{ über } X_1=k \text{ in } X_2=j : p_{ik} \cdot p_{kj} \cdot$$

Da k alle Werte von 1 bis s annehmen kann, folgt aus dem Additions-
satz:

$$W(X_2=j/X_0=i) = p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj} \cdot$$

Dies ist aber die Formel für die Matrizenmultiplikation $P \cdot P$, weshalb

$$(p_{ij}(2)) = p^2 \text{ und daher allgemein:}$$

$$(p_{ij}(n)) = p^n \text{ folgt.}$$

Nun ist die direkte Berechnung der Verteilung $p_i(n)$ aus $p_i(0)$

mittels P^n zweifellos umständlicher als die schrittweise Berechnung

$$p_j(1) = \sum_i p_i(0) \cdot p_{ij}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$p_j(n) = \sum_i p_i(n-1) \cdot p_{ij}$$

Von Interesse ist aber die Frage nach einer stationären Ver-
teilung, für den Fall, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existiert.

Darüber gibt der Ergodensatz Auskunft. Gibt es in der Folge P, P^2, P^3, \dots
eine Matrix, die wenigstens in einer Spalte ein positives kleinstes
Element enthält, dann besitzt die Folge einen Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_1 & p_2 & \dots & p_s \end{bmatrix}$$

Die Verteilung $p_i(\infty)$ stimmt dann mit den Grenzwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_s überein. Falls diese Grenzwerte existieren, kann man sie wie folgt berechnen: Es gilt $P^n = P^{n-1} \cdot P$ und falls n genügend groß ist, unterscheidet sich P^n von P^{n-1} beliebig wenig von der gesuchten Matrix.

Beispiel:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 1/2 p_1 + 1/2 p_2 \quad (1)$$

$$p_2 = 1/2 p_1 + 3/4 p_3 \quad (2)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (3)$$

Aus (1) folgt: $p_1 = p_2$; eingesetzt in (2): $p_2 = 3/2 p_3$

und aus (3): $3/2 p_3 + 3/2 p_3 + p_3 = 1$ mit:

$$p_1 = 3/8, p_2 = 3/8, p_3 = 2/8$$

$$p_i(\infty) = (3/8, 3/8, 2/8)$$

Interpretation:

Bei 80 Beobachtungen des stochastischen Prozesses aus beliebigen Anfangsverteilungen $p_i(0)$ trifft man theoretisch $g_1=30$ -mal den stationären Zustand $X=1$, $g_2=30$ -mal $X=2$ und $g_3=20$ -mal den stat.Zustand $X=3$ an.

Wenn die tatsächlich beobachteten Häufigkeiten etwa $f_1=26$, $f_2=32$ und $f_3=22$ betragen, kann man die theoretische Vorhersage mittels der Chi-Quadrat-Verteilung überprüfen. Man bildet:

$$\sum_{i=1}^{i=3} (f_i - g_i)^2 / g_i = 16/30 + 4/30 + 4/30 + 4/20 = 0,86$$

und vergleicht mit dem Tabellenwert $\chi^2_{0,05}$ beim Freiheitsgrad $m=3-1=2$, wobei sich herausstellt, daß $0,86 < \chi^2_{0,05}(m=2)$, so daß eine Annahme der Hypothese erfolgt.

Es folgt noch ein Beispiel für eine Übergangsmatrix P , bei der keine Grenzmatrix existiert:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } p + q = 1$$

Wie man sieht, ist $P^2=P$ und daher auch $P^n=P$ für alle n , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \quad \text{nicht existiert.}$$

Hier verbleibt die Verteilung im Anfangszustand $p_i(0)$, ist jedoch nicht stationär, da mit jedem anderen Anfangszustand auch ein anderer Endzustand entsteht.

Eine wichtige Methode zur Behandlung stochastischer Prozesse

stellt die Computer-Simulation dar.

Beispiel: Irrfahrt eines Teilchens auf einem ebenen ganzzahligen Gitter mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle 4 Richtungen.

BASIC-Programm: Mit dem Befehl RND wird eine gleichverteilte, reelle Zufallszahl aus dem offenen Intervall (0,1) erzeugt. Mit dem Befehl INT (4*RND)+1 wird eine gleichverteilte Zufallszahl aus der Menge {1,2,3,4} erzeugt. Wir starten im Nullpunkt und beenden den Prozeß, wenn erstmals der Kreis $x^2+y^2=r^2$ erreicht, bzw. überschritten wird. Dann sollen die Koordinaten des Teilchens und die Anzahl der Schritte ausgedrückt werden:

```
10 RANDOMIZE
20 X=0:Y=0:N=0
30 INPUT "RADIUS"; R
40 Z=INT(4*RND)+1
50 IF Z=1 THEN X=X+1 ELSE IF Z=2 THEN X=X-1
60 IF Z=3 THEN Y=Y+1 ELSE IF Z=4 THEN Y=Y-1
70 N=N+1
80 IF X*X+Y*Y < R*R THEN 40
90 PRINT X,Y,N: END
```

Eine verblüffende Anwendung einer ebenen Irrfahrt stellt die näherungsweise Lösung eines elliptischen Randwertproblems dar: Gegeben sei ein Bereich B innerhalb einer geschlossenen Kurve C. Auf C sind die Werte einer Funktion $f(x,y)$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u(x,y)$, für die gilt:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \text{ in B und } u=f \text{ auf C.}$$

Den Funktionswert u in $(x_0, y_0) \in B$ findet man wie folgt:

Man überzieht B mit einem ebenen Gitter und startet n Irrfahrten in (x_0, y_0) . Sind (x_i, y_i) die Koordinaten auf C , in denen die i -te Irrfahrt erstmals C erreicht bzw. überschreitet, so gilt:

$$u(x_0, y_0) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)$$

Literatur:

Brunner u.a.: Mathematik für Handelsakademien, Bd.IV

Berger-Girlich-Zschiesche: Stochastische Prozesse und Modelle

Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt

Fahrmeir, Kaufmann, Cst: Stochastische Prozesse. Eine
Einführung in Theorie und Anwendungen